

# ВОЗМОЖНОСТИ МГД ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЛОКАЛЬНО ИОНИЗОВАННЫЙ ПОТОК ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Янг Ченг Вэй, Е.Г. Шейкин

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург,  
[yangkovsky@gmail.com](mailto:yangkovsky@gmail.com)

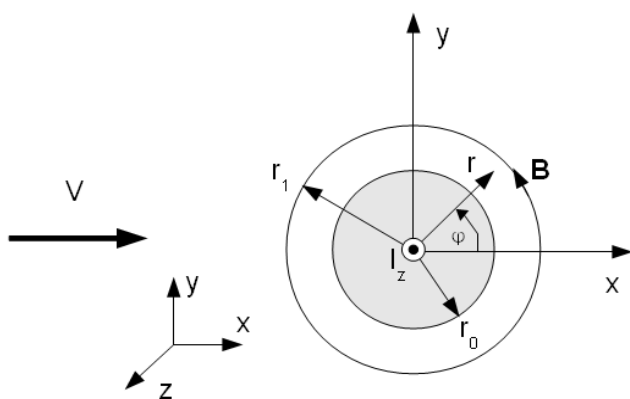
Проблема магнитогидродинамического воздействия на электропроводный поток вокруг цилиндра, вдоль оси которого идет ток, формирующий магнитное поле, исследовалась численно в работах [1-2] и экспериментально в работах [3-5], численно и экспериментально в работах [6]. Основной целью в данных работах было снижение теплового потока на поверхность цилиндра с помощью МГД воздействия на поток.

Результаты, полученные при численном расчете [1-2] предсказывали ~~существенное~~ <sup>обозначения при</sup> ~~снижение~~ <sup>решению задач</sup> (на порядок) теплового потока за счет МГД взаимодействия. Но экспериментально полученные результаты показали заметно меньший эффект (снижение

В нашей работе задача МГД воздействия на поток вокруг цилиндра рассматривается с использованием ряда упрощающих приближений, которые позволили получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. Особое внимание уделяется исследованию пространственного распределения силы Лоренца в области МГД взаимодействия, которое, согласно [7] сильно влияет на эффективность МГД управления потоком. Анализ полученного аналитического решения позволяет понять особенности МГД воздействия на поток вокруг цилиндра и дает возможность оптимально организовать МГД управление обтеканием.

## Основные уравнения и их решения

Рассматривается цилиндр радиуса  $r_0$ , вокруг которого создается магнитное поле током, проходящим вдоль оси цилиндра. Область ионизации расположена вокруг обтекаемого цилиндра и ограничена значениями радиуса в интервале:  $r_0 \leq r \leq r_1$ .



теплового потока не превышало 50 %).

Геометрия и основные обозначения, используемые при решении задачи, показаны на рис.1. Используя обобщенный закон Ома

$$\mathbf{j} + \mu_e (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

и закон непрерывности тока  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  в работе [8] получено дифференциальное уравнение для электрического потенциала  $\Phi$  в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} & (r^2 + \beta_0^2 r_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ & + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r (r^2 - \beta_0^2 r_0^2) \frac{\beta_0^2 r_0^2}{\mu_e} \cdot v_r \\ & - (r^4 + \beta_0^2 r^2 r_0^2) \frac{\beta_0^2 r_0^2}{\mu_e} \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2r^2 \beta_0^3 r_0^3 E_z = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $j$  – плотность тока,  $B$  – магнитное поле, величина которого зависит от радиуса следующим образом:  $B = B_0 r_0 / r$ ,  $E$  – электрическое поле,  $v$  – скорость течения,  $\mu_e$  – подвижность электрона,  $\sigma$  – проводимость газа,  $\beta_0 = \mu_e B_0$  – характерное значение параметр Холла у поверхности обтекаемого цилиндра,  $v_r$  – радиальная скорость течения,  $E_z$  – внешнее электрическое поле вдоль ось  $z$ . Отметим, что при выводе уравнения (2) предполагалось, что проводимость потока постоянна в область ионизации.

Данное уравнение может быть решено численно для произвольного распределения радиальной скорости

потока. Аналитическое решение данного уравнения может быть получено только в очень простых приближениях. В работе [8] использовалось приближение потенциального течения, для которого

$$v_r = V_0 \cdot \cos \varphi \cdot \left(1 - (r_0/r)^2\right) \quad (3)$$

где  $V_0$  – начальная скорость вверху по потоку.

Использование данного приближения позволило получить аналитическое выражение для распределения потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  в области МГД взаимодействия.

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \varphi) = & -V \cos \varphi \frac{r^2 + r_0^2}{\mu_e r} + E_z \frac{(\beta_0 r_0)^3}{2r^2} \\ & + C_1^1 Z_1(1, \beta_0 r_0 / r) + C_2^1 Z_2(1, \beta_0 r_0 / r) \end{aligned} \quad (4)$$

где функции  $Z_1(k, \beta_0 r_0 / r)$ ,  $Z_2(k, \beta_0 r_0 / r)$  выражаются через модифицированные функции Бесселя I и K следующим образом:

$$Z_1(k, x) = I_k(kx) + x I_{k+1}(kx)$$

$$Z_2(k, x) = K_k(kx) - x K_{k+1}(kx)$$

Константы  $C_1^1, C_2^1$  определяются граничными условиями на границах области МГД взаимодействия  $r_0$  и  $r_1$  и имеют разные значения для случаев проводящей и непроводящей поверхности цилиндра. В случае непроводящей поверхности:

$$C_1^1 = -\frac{(r_1 - r_0^2/r_1)K_1(\beta_0)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0) - I_1(\beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}$$

$$C_2^1 = \frac{(r_1 - r_0^2/r_1)I_1(\beta_0)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0) - I_1(\beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}$$

(5)

А в случае проводящей поверхности:

$$C_1^1 = -\frac{2K_1(\beta_0 r_0/r_1)r_0 + (r_1 - r_0^2/r_1)Z_2(1, \beta_0)}{Z_2(1, \beta_0)I_1(\beta_0 r_0/r_1) - Z_1(1, \beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}$$

$$C_2^1 = \frac{2I_1(\beta_0 r_0/r_1)r_0 + (r_1 - r_0^2/r_1)Z_2(1, \beta_0)}{Z_2(1, \beta_0)I_1(\beta_0 r_0/r_1) - Z_1(1, \beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}$$

(6)

Наличие аналитического решения для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$  позволяет нам получить аналитические выражения для распределение токов в области МГД взаимодействия, а следовательно и силы Лоренца действующей на поток.

$$j_r = \frac{\sigma B_0 V}{\beta_0} \cdot \left[ \frac{1}{r} \left( C_1^1 I_1 \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) + C_2^1 K_1 \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) \right) + 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \cdot \cos \varphi$$

$$j_z = \sigma \cdot \left( E_z + B_0 \frac{r_0}{r} \cdot v_r \right) - j_r \cdot \beta_0 \cdot \frac{r_0}{r}$$

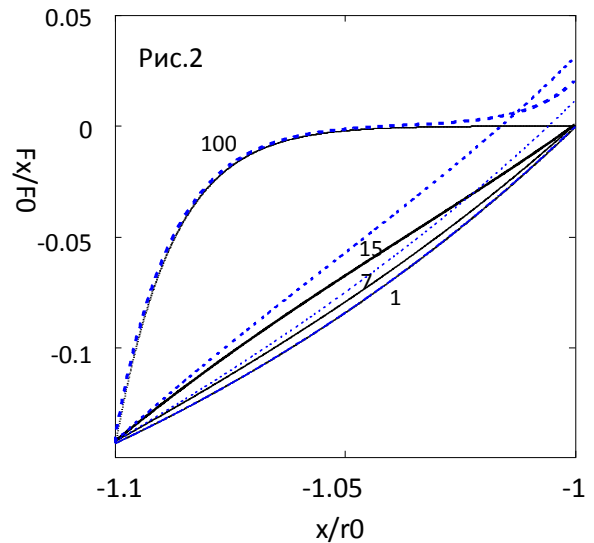
(7)

$$F_r = -j_z \cdot B_\varphi \tag{8}$$

где  $j_r, j_z, F_r$  - плотность радиального тока, плотность тока вдоль оси  $z$ , и радиальная сила Лоренца в единице объёма, соответственно.

## Результаты расчёта

На рис.2-4 показаны распределения силы Лоренца  $F_x = F_r \cos \varphi$ , нормированные на величину  $F_0 = \sigma B_0^2 V_0$  при различных значениях параметра  $\beta_0$  и относительных значениях радиуса внешней границы области МГД взаимодействия  $\tilde{r}_1 \equiv r_1 / r_0$ . Результаты показаны для случая проводящей (пунктирные кривые) и непроводящей (сплошные кривые) поверхности цилиндра. Отметим, что для рассматриваемых условий отрицательное значение  $F_x$  отвечает торможению потока, а положительное, соответственно, ускорению потока.



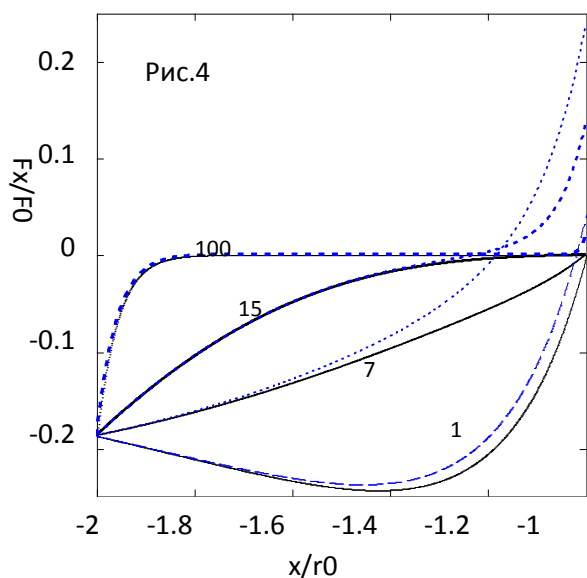
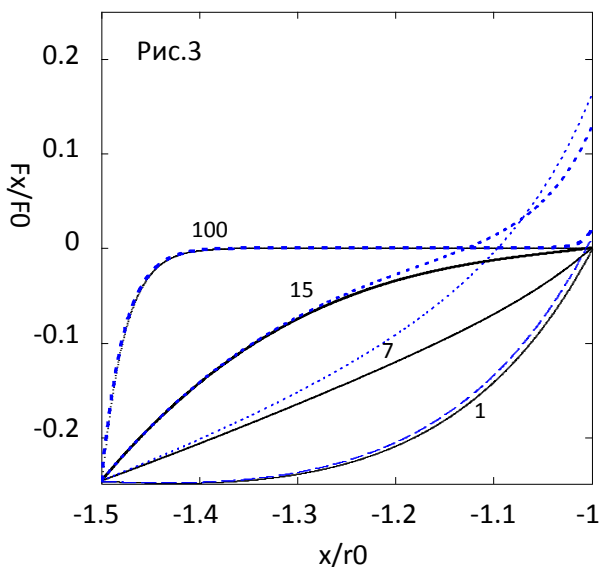


Рис.2-4 Сила Лоренца, действующая вдоль линии торможения ( $\varphi = \pi$ ) в области МГД взаимодействия  $1 \leq r/r_0 \leq \tilde{r}_1$  для разных параметров Холла.

Сплошные кривые для случая непроводящей поверхности, пунктирные для проводящей поверхности цилиндра.

Из результатов представленных на рисунках видно, что:

1. При заданной ширине области ионизации эффективность торможения падает с ростом параметра Холла.
2. Приведенные результаты показывают, что тормозящий эффект силы Лоренца более значим в случае непроводящей поверхности цилиндра. Наибольшее влияние типа поверхности на величину силы Лоренца наблюдается около поверхности цилиндра. При определенных условиях около проводящей поверхности цилиндра возникает сила Лоренца, ускоряющая поток. Следует отметить, что эффект поверхности на величину силы Лоренца максимален при промежуточных значениях параметра Холла. Так на рис.3-4 максимальное различие силы Лоренца отвечающей различным типам поверхности цилиндра достигается при  $\beta_0 \approx 7$ .

Обозначим работу, совершаемую силой Лоренца в единицу времени в единице объема как  $W = F_r \cdot v_r$ .

На рис.5-7 показываются распределения  $W_n = W / (\sigma B_0^2 V_0 r_0)$  в области МГД взаимодействия  $1 \leq r/r_0 \leq \tilde{r}_1$  при  $\varphi = \pi$  для разных параметров Холла  $\beta_0 = 1, 7, 15, 100$ ,

$\tilde{r}_1 \equiv r_1 / r_0 = 1.1, 1.5, 2$  , в случаях проводящей (пунктирные кривые) и непроводящей (сплошные кривые) цилиндра. Видно, что зависимости  $W_n(x)$ , в основном, похожи на зависимости силы Лоренца. Основное отличие наблюдается для случая проводящей поверхности цилиндра. В этом случае сила Лоренца на поверхности цилиндра имеет достаточно большие положительные значения на поверхности цилиндра, а величина  $W$  на поверхности цилиндра обращается в ноль. Это достаточно очевидно так как радиальная скорость на поверхности цилиндра равна нулю.

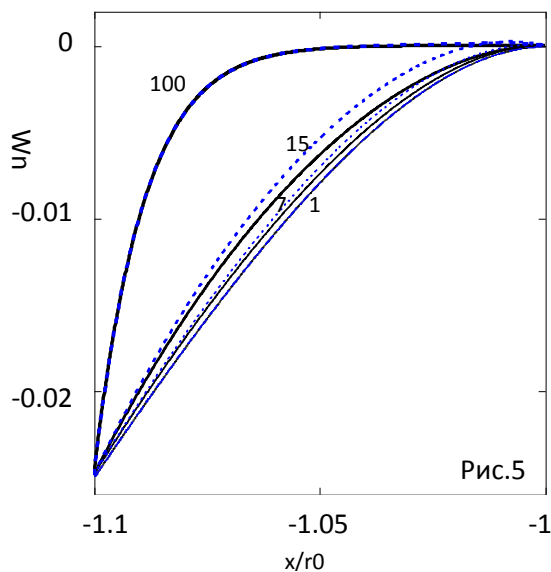


Рис. 5-7 Нормированной плотности работы  $W_n$ . Условия соответствуют условиям для рис.2-4.

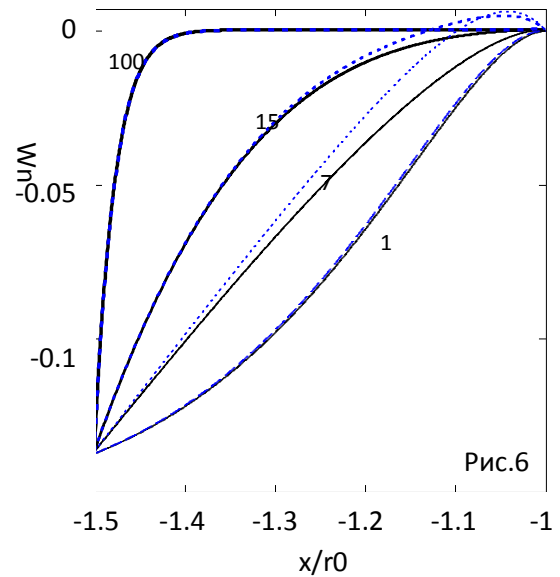


Рис.6

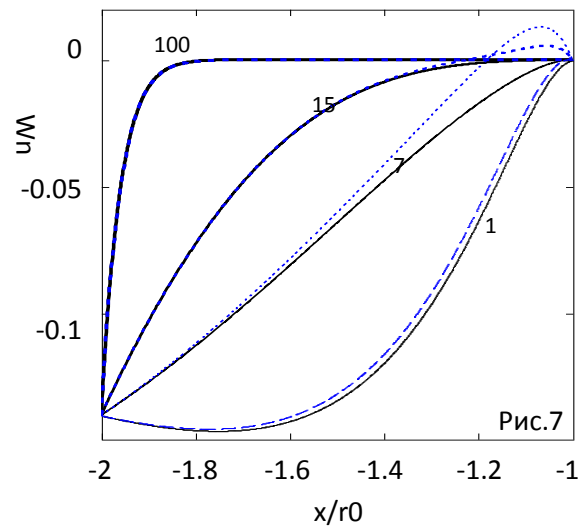


Рис.7

На рис. 8-10 показываются распределения  $W_n = W / (\sigma B_0^2 V_0 r_0)$  при  $\varphi = \pi$  в интервале  $1 \leq r / r_0 \leq 1.5$  при  $\beta_0 = 1, 7, 20$  в случаях внешних полях  $E_z / (B_0 V_0) = -0.1, 0, 0.1$  в случаях  $\beta_0 = 1, 7, 20$ . Эти рисунки показывают возможность управлять МГД воздействием на поток с помощью внешнего электрического поля. Отметим, что прикладывание отрицательного поля приводит к

усилению эффекта МГД торможения потока.

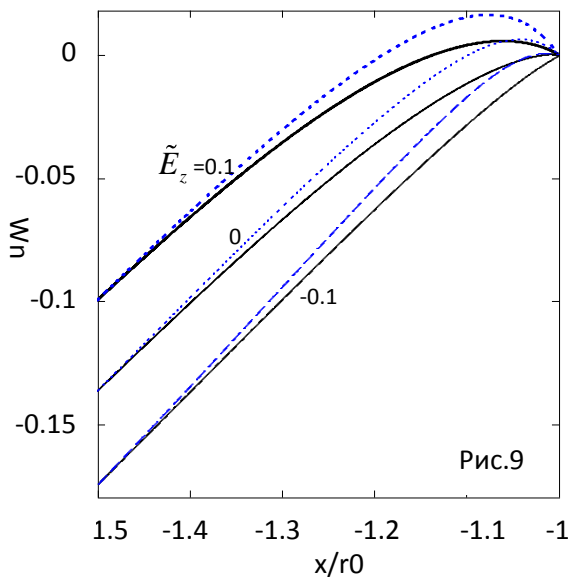
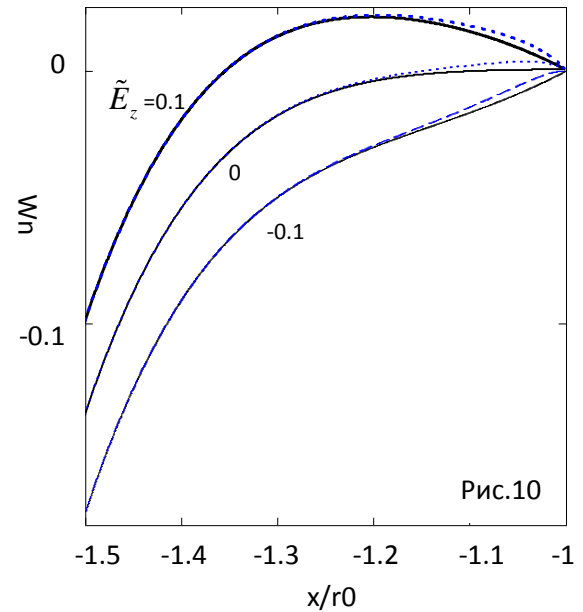
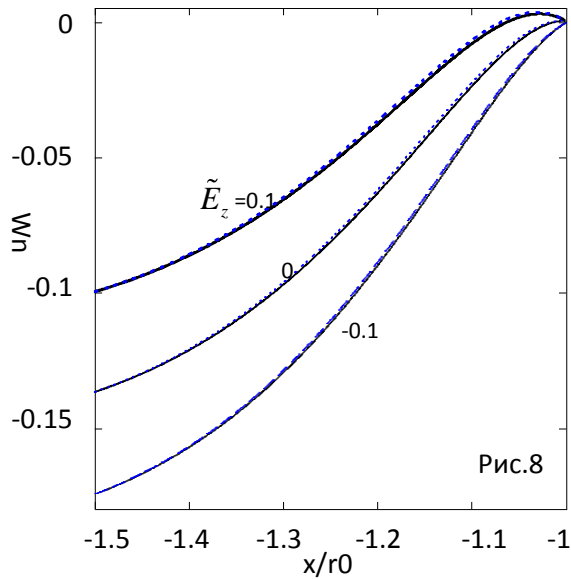


Рис.8-10 Зависимость  $W_n$  от радиуса  $1 \leq r / r_0 \leq 1.5$ . При разных внешних полях  $\tilde{E}_z = E_z / (B_0 V_0) = -0.1, 0, 0.1$

Параметр Холла в рис.8-10 равен 1, 7, 20, соответственно.

Сплошные кривые для случаев непроводящей поверхности, а пунктирные – проводящей.

Наибольший интерес в вопросе управления потоком представляет полная работа которую совершила сила течения в области МГД взаимодействия. Определим работу, приходящуюся на единицу площади, которую сила Лоренца совершает вдоль линии торможения ( $\varphi = \pi$ ) следующим соотношением:

$$A \equiv \int_{r_0}^{r_1} W dr$$

$$A_n \equiv \frac{A}{W_0(r_1 - r_0)} = \frac{1}{\tilde{r}_1 - 1} \int_1^{\tilde{r}_1} W_n d\tilde{r}$$

Этот параметр дает ясное представление о влиянии МГД воздействия на течение, и позволяет оценить его эффективность.

На рис.11 показывается  $A_n$  для разных ширины области ионизации

$1 \leq \tilde{r}_1 \leq 5$ , в случаях  $\beta_0 = 1, 7, 20$  и  $E_z = 0$ .

Результаты, представленные на данном рисунке, показывают, что величина параметра  $A_n$  зависит от свойств поверхности обтекаемого цилиндра, от параметра Холла и от ширины области МГД взаимодействия. Для каждого заданного параметра Холла существует некая оптимальная ширина области МГД взаимодействия, при которой достигается минимальное значение параметра  $A_n$ . Таким образом, эффективность МГД управления течением в локально ионизованном потоке будет существенно выше, чем в случае полностью ионизованного потока.

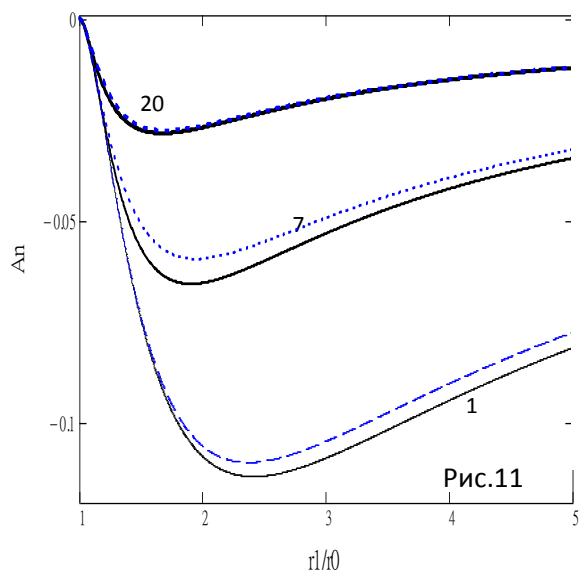


Рис.11 Зависимость  $A_n$  от ширины МГД зона, при разных параметрах Холла (1, 7, 20). Сплошные для непроводящей поверхности, пунктируемые – проводящей.

На рис. 12 показана зависимость  $A_n$  от параметра Холла, в случаях  $E_z / (B_0 V_0) = -0.1, 0, 0.1$ ,  $\tilde{r}_1 = 1.5$ .

Результаты, представленные на данном рисунке показывают, что внешнее электрическое поле позволяет существенно управлять процессом МГД воздействия на поток, а увеличение параметра Холла приводит к снижению эффективности МГД замедления потока. Кроме того следует отметить, что свойства поверхности обтекаемого цилиндра существенно влияют на процесс МГД взаимодействия. В случае непроводящей поверхности цилиндра наблюдается большее МГД торможение потока, чем в случае проводящей поверхности.

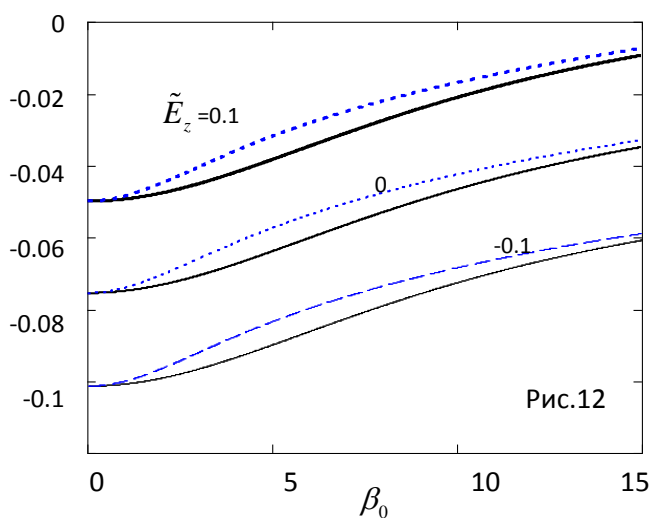


Рис.12 Зависимость  $A_n$  от параметра Холла (1-15). При разных внешних полях

## **Заключение**

Использование аналитического решения для электрического потенциала в неоднородном магнитном поле в области локально-ионизованного течения вокруг цилиндра позволило проанализировать физические процессы МГД воздействия на поток. Полученные результаты показывают, что свойства поверхности цилиндра (проводящая или непроводящая) влияют на МГД эффект. Использование внешнего электрического поля позволяет существенно влиять на МГД эффект. Очень важным параметром, определяющим эффективность МГД воздействия на поток, является ширина

области МГД взаимодействия. Существует некоторая, оптимальная ширина области МГД воздействия, которая зависит от параметра Холла. Таким образом, отрицательное влияние параметра Холла на процесс МГД торможения потока может быть минимизировано правильным выбором ширины области МГД взаимодействия. Эффективность МГД управления течением в локально ионизованном потоке будет существенно выше, чем в случае полностью ионизованного потока. Полученные результаты показывают возможные пути оптимизации МГД управления течением вокруг цилиндра.

## ***Литература***

1. Lineberry J.T., Bityurin V.A., Bocharov A.N., Baranov D.S., Vatazhin A.B., Korchenov V.I., Gousskov O.B., Alferov V.I., Boushmin A.S., "Cylinder with current in hypersonic flow", 3rd workshop on magneto-plasma aerodynamics in aerospace applications, 24-26, April, 2001, p15-25
2. Lineberry J.T., Bityurin V.A., Bocharov A.N., «Analytical study of MHD flow interaction around a right circular cylinder in transverse hypersonic flow», AIAA2002-2112, p.135-149
3. Bityurin V.A., et al., "Experimental studies of MHD interaction at circular cylinder in hypersonic airflow", Proc. of 4th Moscow workshop on magneto-plasma aerodynamics in aerospace applications, IVTAN, Moscow, 9-11 April 2002.
4. Битюрин В.А., Бочаров А.Н., «МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ» Изв.РАН.МЖГ, 2006, №5, с. 188–203.
5. Lineberry J.T., Bityurin V.A., Bocharov A.N., Baranov D.S., "MHD interaction at a cylinder in hypersonic flow"
6. Bityurin V.A., Bocharov A.N., Baranov D.S., et al., "Theoretical and experimental study of an MHD interaction effects at circular cylinder in a transversal hypersonic flow", 40th



AIAA aerospace science meeting, 14-17. January.2002, AIAA paper 2002-0491, Reno,NV

7. Sheikin E.G., "Local MHD effect on supersonic flows", 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 09-12, JAN, 2012, AIAA paper 2012-1028
8. Шейкин Е.Г., Yang Cheng Wei, «Расчет электрического потенциала и силы Лоренца в локально ионизованном МГД течении в неоднородном магнитном поле при поперечном обтекании кругового цилиндра.» ЖТФ в печати.